Oplossing Oefening 63

Gegeven: een doos met 5 weerstanden, met 1 defecte erbij.
X = het aantal trekkingen die nodig zijn, als we 1 voor 1 trekken, alvorens de defecte gevonden is.

(a) De veranderlijke X kan als waarden aannemen:
1 (als je bij de 1ste trekking de defecte hebt), 2 (als pas bij de 2de trekking), 3 (pas bij 3de trekking) en 4 (bij de 4de trekking heb je de defecte ofwel heb je niet de defecte maar dan is automatisch de laatste de defecte)
Merk dus op dat je maximaal 4 trekkingen moet doen.
Kansverdeling: (d = de defecte weerstand, 1^e = resultaat van de 1ste trekking, enz …)

$$P(X=1)=P(1^e=d)=\frac{1}{5}$$

$$P(X=2)=P(1^e\neq d\cap 2^e=d)=P(1^e\neq d)P(2^e=d\,/\,1^e\neq d)=\frac{4}{5}\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$$

$$\begin{aligned}P(X=3)&=P(1^e\neq d\cap 2^e\neq d\cap 3^e=d)\\&=P(1^e\neq d)P(2^e\neq d\,/\,1^e\neq d)P(3^e=d\,/\,1^e\neq d\cap 2^e\neq d)\\&=\frac{4}{5}\frac{3}{4}\frac{1}{3}=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

$$P(X=4)=P(\left(1^e\neq d\cap 2^e\neq d\cap 3^e\neq d\cap 4^e=d\right)\cup\left(1^e\neq d\cap 2^e\neq d\cap 3^e\neq d\cap 4^e\neq d\right))$$

$$=P(1^e\neq d)P(2^e\neq d\,/\,1^e\neq d)P(3^e\neq d\,/(1^e\neq d\cap 2^e\neq d))P(4^e=d\,/(1^e\neq d\cap 2^e\neq d\cap 3^e\neq d))$$

$$+P(1^e\neq d)P(2^e\neq d\,/\,1^e\neq d)P(3^e\neq d\,/(1^e\neq d\cap 2^e\neq d))P(4^e\neq d\,/(1^e\neq d\cap 2^e\neq d\cap 3^e\neq d))$$

$$=\frac{4}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}=\frac{2}{5}$$

Telkens hebben we de veralgemeende productregel gebruikt.
Samenvattend:

x	1	2	3	4
$p(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

De cumulatieve verdelingfunctie is dan:

$$F(x)=\begin{cases}0 & als\ \ x<1\\ \frac{1}{5} & als\ 1\leq x<2\\ \frac{2}{5} & als\ 2\leq x<3\\ \frac{3}{5} & als\ 3\leq x<4\\ 1 & als\ \ x\geq 4\end{cases}$$

(b) De verwachtingswaarde:

$$E[X] = \sum_{x=1}^{4} x \cdot P(X = x)$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{2}{5} = \frac{14}{5} = 2.8$$

(c) De variantie

$$Var(X) = E\left[X^2\right] - (E[X])^2$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} + 9 \cdot \frac{1}{5} + 16 \cdot \frac{2}{5} - (\frac{14}{5})^2$$

$$= \frac{34}{25} = 1.36$$

(d) De modus

De modus is het absolute maximum. Ga dus het rijtje af:
In 4 is de kans absoluut het grootst dus is 4 de modus.

(e) De mediaan is de waarde waar de cumulatieve verdeling voor het eerst 0.5 wordt of meer.

In 2 is de cumulatieve verdeling $\frac{2}{5} < 0.5$, in 3, $\frac{3}{5} \geq 0.5$ dus is de mediaan 3.

(f)

$$E\left[X^3 - X - 3\right] = E\left[X^3\right] - E[X] - 3$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{5} + 8 \cdot \frac{1}{5} + 27 \cdot \frac{1}{5} + 64 \cdot \frac{2}{5} - \frac{14}{5} - 3$$

$$= 27$$

(g) $P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

(h) $P(1 < X \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$

of: $P(1 < X \leq 4) = 1 - P(X = 1) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$